Ex.24　解: 先计算齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= 0, \\ x_1 + x_2 + ax_3 &= 0 \end{cases} \tag{1}$$

的基础解系. 对系数矩阵作初等行变换

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & a-3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & a-2 \end{pmatrix}.$$

当$a=2$ 时,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

齐次线性方程组(1) 有基础解系

$$\xi = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

通解为$k\xi$, k 为任意常数. 将$k\xi$ 代人齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + bx_2 + cx_3 &= 0, \\ 2x_1 + b^2x_2 + (c+1)x_3 &= 0 \end{cases} \tag{2}$$

得

$$\begin{cases} -1 - b + c &= 0, \\ -2 - b^2 + c + 1 &= 0 \end{cases}$$

解之得$b=0, c=1$ 或者$b=1, c=2$.

当$a=2, b=0, c=1$ 时, 对方程组(2) 的系数矩阵作初等行变换

$$\begin{pmatrix} 1 & b & c \\ 2 & b^2 & c+1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & b & c \\ 0 & b^2-2b & -c+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

显然, 方程组(1) 的解空间的维数是1, 方程组(2) 的解空间的维数是2, 方程组(1) 与方程组(2) 不可能同解.

当$a=2,b=1,c=2$ 时, 对方程组(2) 的系数矩阵作初等行变换

$$\begin{pmatrix} 1 & b & c \\ 2 & b^2 & c+1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

齐次线性方程组(2) 有基础解系

$$\eta = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

可见, 方程组(1) 与方程组(2) 同解.

当$a \neq 2$ 时, 齐次线性方程组(1) 只有零解. 而齐次线性方程组(2) 对任何b,c 都有无穷多解. 这时, 方程组(1) 与方程组(2) 不可能同解.